

Práctica 10

1. Función Gama

La función $\Gamma : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

se llama *función Gama*.

a) Probar que:

- ★ $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re}(z) > 0$.
- ★ $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Dado $z \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ tal que $\operatorname{Re}(z) < 0$ se define:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n-1)}$$

si $n \in \mathbb{N}$ y $\operatorname{Re}(z+n) > 0$. Mostrar que la definición no depende del $n \in \mathbb{N}$ elegido.

c)† Probar que $\Gamma(z)$ converge uniformemente en toda banda vertical de la forma $0 < \epsilon \leq \operatorname{Re}(z) \leq M$.

Deducir de c) y de b) que Γ es holomorfa en $\mathbb{C} - \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

Transformada de Laplace

2. Hallar la transformada de Laplace de:

a) $\sin x$

b) x^3

c) $(x+b)^2$

3. Para $s > 0$ y $p > -1$, probar que: $\mathcal{L}(t^p)(s) = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$

4. Hallar la transformada inversa de Laplace de:

a) s^{-2}

b) $s^{-\frac{1}{2}}$

c) $(s^2 - a^2)^{-1}$

d) $\frac{e^{-as}}{s^2}$

e) $\frac{1}{s^2 + s + 2}$

f) $\frac{e^{-3s}}{s^2 + s + 2}$

g) $(s-2)^{-\frac{1}{2}}$

h) $\frac{4-5s}{s^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{s^2 + 2s}$

i) $\frac{2s+3}{s^2 - 4s + 20}$

j) $\log(1+s^{-1})$

k) $\log\left(\frac{s+6}{s+2}\right)$

5. a) Hallar f tal que:

$$(i) \quad f(t) = \int_0^t f(t-u)e^u du + \operatorname{ch}(t)$$

$$(ii) \quad f(t) = 1 + \int_0^t f(t) \operatorname{sen}(t-u) du$$

b) Calcular $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{(s^2 + a^2)^2} \right) (t)$

c) Probar que $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{\sqrt{s}} \right) (t) = \frac{\cos(2\sqrt{t})}{\sqrt{\pi t}}, s, t > 0.$

6. Resolver, para $x > 0$:

a) $u'' + 2u' + u = e^{-x}$ con: $u(0) = u'(0) = 0$

b) $u'' + u' + u = \operatorname{sen} x$ con: $u(0) = 0, u'(0) = 1$

c) $x u'' + u' + x u = 0$ con: $u(0) = 1, u'(0) = 0$

Nota: en c) hallar solo la transformada de Laplace de u .

7. Transformando Laplace, hallar $u(x, t)$ de clase $\mathcal{C}^1$ y de orden exponencial respecto de t , definida para $(x, t) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, solución de la ecuación:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - 4 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0$$

$$u(x, 0) = 2e^{-3x}.$$

Sugerencia: Recordar que si $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es de orden exponencial, $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}(f)(s) = 0$.

8. Transformando Laplace, hallar $u(x, t)$ solución de:

a) $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + 2u(x, t) = 0$

$$u(x, 0) = 10e^{-x} - 6e^{-4x}$$

b) $y'(t) + 7 \int_0^t \cos(3t - 3\tau)y(\tau)d\tau = 1 \quad (t \geq 0)$

$$y(0) = 2$$